
THÉORIE DES ENSEMBLES, DÉNOMBREMENT

Exercice 1. * Calculer $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ (faire le suivant si c'est trop facile).

Exercice 2. * Soient E un ensemble non vide et $x \in E$. Montrer que E est infini si et seulement s'il existe une bijection $E \xrightarrow{\sim} E \setminus \{x\}$.

Rappel. Un ensemble est *dénombrable* s'il est fini ou en bijection avec \mathbf{N} .

Exercice 3. ** Montrer qu'un ensemble X est dénombrable si et seulement s'il existe une injection $X \rightarrow \mathbf{N}$, ce qui équivaut aussi à l'existence d'une surjection $\mathbf{N} \rightarrow X$.

Exercice 4. * Montrer que $\mathbf{N}^{(\mathbf{N})}$ (l'ensemble des suites d'entiers nulles à partir d'un certain rang) est dénombrable.

Exercice 5. * L'ensemble des parties finies de \mathbf{N} est dénombrable.

Exercice 6. ** Montrer que $\text{Card}(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}) = \text{Card}(\mathbf{R})$.

Remarque. Prolongement possible de l'exercice : $\text{Card}(\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})) = \text{Card}(\mathbf{R}) < \text{Card}(\mathcal{P}(\mathbf{R})) = \text{Card}(\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}))$ (plus difficile).

Exercice 7. *** (CANTOR-BERSTEIN).

(1) Soient E un ensemble et $\varphi: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application croissante (pour l'inclusion). Montrer que φ admet un point fixe.

(2) Soient E et F deux ensembles, et $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow E$ deux applications injectives. En considérant l'application $\mathcal{P}(E) \ni A \mapsto E \setminus (g(F \setminus f(A))) \in \mathcal{P}(E)$, montrer qu'il existe une bijection de E dans F .

Exercice 8. * Montrer que $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$.

Exercice 9. * Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 10. ** Calculer $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{\lfloor n/3 \rfloor}$. Généraliser.

Exercice 11. * Soit E un ensemble de cardinal n . Calculer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$, puis tels que $X \cup Y = E$.

Exercice 12. ** Soit E un ensemble de cardinal n . Calculer $\sum_{X, Y \subset E} \#(X \cap Y)$ et $\sum_{X, Y \subset E} \#(X \cup Y)$.

Exercice 13. * UNE FORMULE D'INVERSION BIEN UTILE. Soient $(G, +)$ un groupe abélien (noté additivement) et $f: \mathbf{N} \rightarrow G$ une application. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $g(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$f(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k).$$

Remarque. Prolongement possible de l'exercice : la formule d'inversion de Möbius (très importante en arithmétique). Si $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on pose $\mu(n) = 0$ si n est divisible par un carré > 1 . Sinon, on peut écrire $n = p_1 \cdots p_r$ où p_1, \dots, p_r sont des nombres premiers deux à deux distincts : on pose alors $\mu(n) = (-1)^r$. Soient $(G, +)$ un groupe abélien (noté additivement) et $f: \mathbf{N}_{>0} \rightarrow G$ une application. Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on pose $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$$

Exercice 14. * Si $n \in \mathbf{N}$, soit s_n le nombre d'éléments de \mathfrak{S}_n sans point fixe. Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_k = n!$. En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n!}$.

Exercice 15. ** Calculer :

- (0) le nombre de fonctions $\{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$;
- (1) le nombre de fonctions strictement croissantes $\{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$;
- (2) le nombre de fonctions croissantes $\{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$;
- (3) le nombre de fonctions injectives $\{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$;
- (4) le nombre de fonctions surjectives $\{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ [indication : utiliser la formule d'inversion bien utile].

Exercice 16. * Soit $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ (nombres de Fibonacci). Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} F_n T^n = \frac{1}{1-T-T^2}$.

Exercice 17. * Calculer la somme des éléments de $\{xyz; (x, y, z) \in \mathbf{N}^3, x + y + z = n\}$ [indication : poser $F(T) = \sum_{n=1}^{\infty} nT^n \in \mathbf{Q}[[T]]$ et étudier $F(T)^3$].

Exercice 18. * Montrer que la dimension sur K de l'espace des polynômes homogènes de degré n dans $K[X_1, \dots, X_r]$ est $\binom{n+r-1}{n}$ [indication : poser $G(T) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathbf{Q}[[T]]$ et étudier ses dérivées successives].